

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
**«МУРМАНСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ
УНИВЕРСИТЕТ»**

Кафедра цифровых
технологий, математики и
экономики

**Методические указания
к выполнению расчетно-графической работы
по модулю «Введение в математический анализ»**

по дисциплине: «Математический анализ», часть 1
название дисциплины

для направлений: 09.03.01 «Информатика и вычислительная техника»,

09.03.02 «Информационные системы и технологии», бакалавриат,
наименование направления подготовки

очная форма обучения

код и наименование специальности, форма обучения

Мурманск
2021

УДК 517.2(076)
ББК 22.161
М-54

Составитель – Кацуба Валентина Сергеевна, канд. физ.-мат. наук, доцент кафедры цифровых технологий, математики и экономики МГТУ

Методические указания к выполнению расчетно-графической работы по модулю «Введение в математический анализ» дисциплины «Математический анализ», часть 1, рассмотрена и одобрена на заседании кафедры-разработчика цифровых технологий, математики и экономики МГТУ

«21» 06 2021 г., протокол №12 .

дата

Рецензент –Ромахова Ольга Андреевна, старший преподаватель кафедры цифровых технологий, математики и экономики МГТУ

Зарегистрировано как электронное издание МГТУ

Заказ

Уч-изд. листов

Оглавление

1. Общие организационно-методические указания.....	4
2. Задания РГР	4
3. Требования к оформлению, план выполнения	10
4. Примерный вариант защиты	10
5. Список учебных ресурсов	Ошибка! Закладка не определена.
6. Образец оформления титульного листа.....	11

1. Общие организационно-методические указания

Расчетно-графическая работа «Введение в математический анализ» предусмотрена в первой части дисциплины «Математический анализ» и включает в себя задачи, относящиеся к первому модулю дисциплины. При выполнении этих заданий предполагается существенное повторение основных структур элементарной математики с целью упорядочения, корректировки и выравнивая школьных знаний первокурсников. Предусмотрены задания для индивидуальной и групповой работы для формирования навыков взаимного обучения и пользования литературными источниками.

Целевая установка: при выполнении РГР студент должен показать усвоенный материал по элементам теории множеств, характеристикам функций одной переменной и комплексным числам, а также подтвердить свою подготовку по элементарной математике, достаточную для дальнейшего изучения дисциплин математического цикла по выбранному направлению подготовки.

2. Задания РГР

Часть 1 (14 баллов, индивидуальные задания)

Учебное пособие «Множества и отображения» [2], Контрольные задания (страницы 153 - 177).

Из заданий 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 нужно выполнить по одному варианту, указанному преподавателем (всего в каждом задании приведено 30 вариантов).

Часть 2 (21балл, задания на группу)

Вариант 1 – для студентов группы ИСТб-21,
вариант 2 – для студентов группы ИВТб-21-12,
вариант 3 – для студентов группы ИВТб-21-11.

Задание 1 (2 балла)

Преобразуйте уравнение вида $F(x, y) = 0$ в полярную систему координат и постройте его график. По графику определите количество функций $y = f(x)$, которые задаются в неявной форме данным уравнением, и укажите множества, на которых эти функции определены.

Вариант 1: $(x^2 + y^2)^3 = 4a^2 xy(x^2 - y^2)$, $a > 0$.

Вариант 2: $(x^2+y^2)^3=4a^2x^2y^2, a > 0.$

Вариант 3: $(x^2+y^2)^3=2a^2(x^4+y^4), a > 0.$

Задание 2 (2 балла)

Вариант 1

Найдите множество A значений a , при которых множество решений неравенства $(a-1)x > 1$ является подмножеством множества решений неравенства $5x > a+3$. Укажите следующие характеристики множества A : ограниченность, точные грани, экстремумы, мощность множества.

Вариант 2

Найдите множество A значений a , при которых неравенство $(x-a) \cdot \sqrt{x+3} \leq 0$ имеет ровно 4 целых решения. Укажите следующие характеристики множества A : ограниченность, точные грани, экстремумы, мощность множества.

Вариант 3

Найдите множество A значений a , при которых система неравенств не имеет решений:

$$\begin{cases} |x+3|-3 > x \\ ax^2+2x(a-1)+a-1 < 0 \end{cases}$$

Укажите следующие характеристики множества A : ограниченность, точные грани, экстремумы, мощность множества.

Задание 3 (2 балла)

Вариант 1

Постройте множество B и перечислите его элементы:
 $B = \{(x; y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2x + y \geq 2, x - 2y \geq -1, 2x - y \leq 4\}$.

Укажите количество элементов и найдите экстремумы следующего множества

$$A = \{z \in \mathbb{R} / z = 3x - 3y + 5, (x; y) \in B\}.$$

Вариант 2

Постройте множество B и перечислите его элементы:
 $B = \{(x; y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2x + y \geq 2, x - 2y \geq -1, 2x - y \leq 4, y \geq 0\}$.

Укажите количество элементов и найдите экстремумы следующего множества

$$A = \{z \in \mathbb{R} / z = 3x + 4y - 5, (x; y) \in B\}.$$

Вариант 3

Постройте множество B и перечислите его элементы:
 $B = \{(x; y) / x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}, 2x + y \geq 2, x - 2y \geq -1, 2x - y \leq 4, x + y \leq 4\}$.

Укажите количество элементов и найдите экстремумы следующего множества

$$A = \{z \in \mathbb{C} / z = 3x^2 - y + 1, (x; y) \in B\}.$$

Задание 4 (2 балла)

Вариант 1

Башня имеет следующую форму: на прямой круглый усеченный конус с радиусами оснований $2R$ (нижнего) и R (верхнего) и высотой R поставлен цилиндр радиуса R и высоты $2R$; на цилиндре установлена полусфера радиуса R . Выразите площадь S поперечного сечения башни как функцию расстояния x , на которое сечение удалено от нижнего основания конуса. Постройте график функции $S = f(x)$ и охарактеризуйте её глобальные свойства.

Вариант 2

Функция $y = f(x)$ определена так: в каждом из промежутков $x \in [n; n+1)$, $n \in \mathbb{Z}$ функция является линейной, причём $f(n) = -1$, $f(n+0,5) = 0$. Постройте график этой функции и охарактеризуйте её глобальные свойства.

Вариант 3

Материальная точка $M(x; y)$ движется по плоской траектории в течение двух минут так, что её декартовы прямоугольные координаты изменяются в зависимости от времени t по следующему закону:
$$\begin{cases} x(t) = 2 \cos^3 \pi t \\ y(t) = 2 \sin^3 \pi t \end{cases}$$
. Постройте траекторию движения по точкам, взяв шаг по t равным 15 секундам. Составьте уравнение траектории в виде функции $y(x)$, имеющей неявное и явное задание, охарактеризуйте глобальные свойства этой функции.

Задание 5 (2 балла)

Составьте необходимую табличку значений и постройте график указанной функции, укажите мощность множества её значений.

Вариант 1: $y = x - [x]$.

Вариант 1: $y = [x^2]$.

Вариант 1: $y = x^2 - [x^2]$.

Задание 6 (3 балла)

Выполните действия над комплексными числами.

Вариант 1:

$$1) \frac{(1+2i)^2 - (1+i)^3}{(3-2i)^3 - (2-i)^2}; \quad 2) \frac{(1-\sqrt{3}i)^7}{(-2+2i)^5}; \quad 3) \frac{z^{124}}{z^{98} - iz^{98}}, \text{ если } z = \sqrt{3} + i.$$

Вариант 2:

1) $\frac{(1-2i)^3 - (1+i)^2}{(3+2i)^2 - (2-i)^3}$; 2) $\frac{(1+\sqrt{3}i)^8}{(2-2i)^5}$; 3) $\frac{z^{124}}{z^{90} + iz^{90}}$, если $z = \sqrt{3} - i$.

Вариант 3:

1) $\frac{(1+i)^2 - (3+i)^3}{(3+2i)^3 - (1-2i)^2}$; 2) $\frac{(\sqrt{3}-i)^{10}}{(-2+2i)^6}$; 3) $\frac{z^{130}}{z^{90} - iz^{90}}$, если $z = \sqrt{2} - i\sqrt{2}$.

Задание 7 (1 балл)

Найдите элементы указанного множества.

Вариант 1: $X = \{x \in \mathbb{R} / |4i - 1 + \log_{0,5} x| \geq 5\}$.

Вариант 2: $X = \{x \in \mathbb{R} / |4i - 1 + \log_{0,5} x| < 5\}$.

Вариант 3: $X = \{x \in \mathbb{R} / |4i + 1 - 2^{-x}| \leq 5\}$.

Задание 8 (5 баллов)

Решите следующие алгебраические уравнения на множестве комплексных чисел.

Вариант 1:

1) $4x^2 - 8x + 5 = 0$; 2) $x^2 + (i - 6)x + 8 - 4i = 0$;

3) $x^4 + 81 = 0$;

выполните построение корней на комплексной плоскости;

4) $x^3 - 3x^2 + 7x - 5 = 0$; 5) $6x^4 + 7x^3 + 5x^2 - x - 2 = 0$.

Вариант 2:

1) $4x^2 - 8x + 5 = 0$; 2) $x^2 - (3 + 2i)x + 6i = 0$;

3) $x^5 + 32 = 0$;

выполните построение корней на комплексной плоскости;

4) $x^3 - 2x^2 + x - 2 = 0$; 5) $x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 16x + 12 = 0$.

Вариант 3:

1) $4x^2 + 9 = 0$; 2) $(1 + i)x^2 - (7 + 5i)x + 12 + 4i = 0$;

3) $x^6 - 64 = 0$;

выполните построение корней на комплексной плоскости;

4) $x^3 + 3x^2 + 25x - 29 = 0$; 5) $5x^4 + 4x^3 - 6x^2 - 4x + 1 = 0$.

Задание 9 (2 балла)

Вариант 1

Найдите множество A значений параметра a таких, что неравенство $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 > 0$ будет справедливым при $\forall x \in \mathbb{R}$.

Вариант 2

Найдите множество A значений параметра a таких, что неравенство $x^2 - 2ax + 2a^2 - 4a + 3 < 0$ не будет справедливым ни при каких значениях x .

Вариант 3

Найдите множество A значений параметра a таких, что неравенство $(a-3)x^2 - 2ax + 3a - 6 > 0$ будет справедливым при $\forall x \in \mathbb{R}$.

3. Требования к оформлению, план выполнения

1. РГР выполняется студентами самостоятельно на основе изученного теоретического материала дисциплины, в течение примерно одного месяца.
2. Структура РГР: работа состоит из двух частей, включающих задания, относящиеся к модулям «Основные структуры элементарной математики» и «Введение в математический анализ». Первая часть РГР включает 7 типовых заданий, каждое из которых нужно выполнить по индивидуальному варианту. Вторая часть состоит из 9 оригинальных заданий, каждое из которых представлено в трёх вариантах, распределенных по группам. Предполагается, что при выполнении заданий второй части будет активизирована групповая работа студентов с целью взаимного консультирования и помощи в обучении, а также выравнивания начальной подготовки первокурсников.
3. Подготовка выполненных заданий к экспертизе должна проводиться каждым студентом строго индивидуально. Полностью совпадающие решения будут при проверке аннулироваться. Изложение каждого решения нужно проводить самостоятельно (как Вы его понимаете), стараться делать это достаточно подробно, чтобы при внешнем прочтении решение было понятным в логическом и в расчетном аспектах.
4. Представляется РГР на экспертизу преимущественно в рукописном виде отдельной тетрадью (обязательно подписать на титульном листе название работы и информацию об авторе). В тетрадь следует вложить распечатку документа с полными условиями всех заданий выполненного варианта (не забыть указать номера вариантов и для первой, и для второй части работы). Решения заданий можно приводить в произвольном порядке, сохраняя номер задания и записывая его краткое условие. На обороте титульного листа необходимо подготовить табличку для вынесения результатов экспертизы.

5. Выполненная и оформленная работа сдаётся на проверку преподавателю, ведущему практические занятия в группе не позднее срока, указанного в календарном плане прохождения дисциплины. При прохождении контрольной точки «Защита РГР» ожидается, что студент подтвердит понимание представленных им решений на аналогичных заданиях или их фрагментах.
6. В процессе выполнения РГР предоставляется возможность получать консультации у преподавателей, ведущих дисциплину, и приветствуется реализация этой возможности в специально указанное время.
7. Некоторые из заданий, представленные на экспертизу оригинальным, спорным или непонятным решением, могут обсуждаться с автором решения во время сдачи коллоквиума по дисциплине.

4. Примерный вариант защиты РГР

Наибольшее количество баллов - 10

Специальности 09.03.01 ИВТ, 09.03.02 ИСТ
дисциплина: Математический анализ, ч.1
2021 - 2022 уч. год

Задания для защиты РГР «Введение в математический анализ», вариант 0

1. Дано множество $A = \{(x; y) / x \in \mathbf{Z}, y \in \mathbf{Z}, 0 \leq x \leq 2, 0 \leq y \leq 2x\}$. Найдите $n(A)$.
2. Дана функция $f(x) = 2^{x^2-1}$ и множество $A = [-1; 2)$. Найдите $f(A)$.
3. $f(x) = \frac{2x-1}{1-x}$. Найдите множество $A = \{x / y = f(x), y \in [0; 1]\}$.
4. Постройте график данной функции и укажите количество точек её локальных экстремумов:
$$y = |x - x^2| + 1.$$
5. Укажите мощность множества X и найдите $\min X$, если X – это ООФ
 $y = \sqrt{2 - \lg|x-2|}$.
6. Найдите длину промежутка, на который функция $y = \sqrt{|x|}$ отображает интервал $(-4; 9)$.

7. Выполните действия над комплексными числами в алгебраической форме:

$$z = \frac{3+i}{(1+i)(1-2i)} + \frac{(2+i)^2}{1+2i}.$$

8. Выполните действия над комплексными числами в тригонометрической или в показательной форме:

$$z = \frac{z_1^{13}}{z_2}, \quad z_1 = 1+i, \quad z_2 = 1-i.$$

9. Найдите корни квадратного уравнения и сделайте проверку по теореме Виета:

$$z^2 - 20z + 92 + 6i = 0.$$

10. Решите биквадратное уравнение на множестве комплексных чисел:

$$x^4 + 7x^2 + 12 = 0.$$

11(бонус 2 балла). Даны два множества: $X_1 = \{x / |x-2| < 10\}$, $X_2 = \{x / x^2 < a\}$.

Найдите множество $A = \{a / X_2 \subset X_1\}$.

Ответы к заданиям защиты РГР, 0 вариант

1. $n(A) = 9$. 2. $f(A) = [0, 5; 8)$. 3. $A = \left[\frac{1}{2}; \frac{2}{3} \right]$. 4. 3.

5. Континуум, $\min X = -98$. 6. 3. 7. $3+0,2i$. 8. $z = 8(\cos \pi + i \sin \pi) = -8$.

9. $z_1 = 13-i$, $z_2 = 7+i$. 10. $x \in \{2i; -2i; i\sqrt{3}; -i\sqrt{3}\}$. 11. $A = (-\infty; 64]$.

5. Список рекомендуемых учебных ресурсов

1. Электронный конспект лекций «Введение в математический анализ» ведущего преподавателя дисциплины.
2. Филимоненкова Н.В., Бакусов П.А. Множества и отображения. Интенсивное введение в математический анализ для студентов технических вузов: Учебное пособие. – СПб.: Из-во «Лань», 2017. – 180с.: ил.
3. Электронный практикум по модулю «Введение в математический анализ» ведущего преподавателя дисциплины.
4. Выгодский, М.Я. Справочник по элементарной математике / М. Я. Выгодский. - 27-е изд., испр. - Москва: Наука, 1986. - 317 с. (*последующие и предыдущие издания*).

6. Образец оформления титульного листа

МИНИСТЕРСТВО НАУКИ И ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ РФ
ФГАОУ ВО «Мурманский государственный технический университет»

Кафедра цифровых технологий,
математики и экономики

Расчетно-графическая работа
«Введение в математический анализ»
по дисциплине «Математический анализ», часть 1

выполнил: студент группы ИВТ-21о

Судов Андрей

проверил: доцент Кацуба В.С.

оценка: _____

дата: _____

Мурманск
2021